

Peter V. O'Neil

MATEMÁTICAS AVANZADAS PARA INGENIERÍA

Séptima edición

Matemáticas avanzadas para ingeniería

7a. Edición

PETER V. O'NEIL

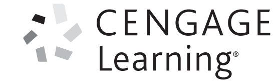
University of Alabama at Birmingham

TRADUCCIÓN

Juan Carlos Rodríguez Aguilar
Traductor profesional
con la colaboración de Fernando Álvarez King

REVISIÓN TÉCNICA

Dr. Edmundo Palacios Pastrana
Universidad Iberoamericana



Australia • Brasil • Corea • España • Estados Unidos • Japón • México • Reino Unido • Singapur



Matemáticas avanzadas para ingeniería
Séptima edición
Peter V. O'Neil

Presidente de Cengage Learning Latinoamérica:
Fernando Valenzuela Migoya

Director Editorial, de Producción y de Plataformas Digitales para Latinoamérica:
Ricardo H. Rodríguez

Editora de Adquisiciones para Latinoamérica:
Claudia C. Garay Castro

Gerente de Manufactura para Latinoamérica:
Raúl D. Zendejas Espejel

Gerente Editorial en Español para Latinoamérica:
Pilar Hernández Santamarina

Gerente de Proyectos Especiales:
Luciana Rabuffetti

Coordinador de Manufactura:
Rafael Pérez González

Editor:
Omegar Martínez

Diseño de portada:
Sergio Bergocce

Imagen de portada:
Ver crédito en forros

Composición tipográfica:
Juan Carlos Rodríguez Aguilar

Traducido del libro: *Advanced Engineering Mathematics*,
Seventh Edition
Publicado en inglés por Cengage Learning
© 2012 ISBN: 978-1-111-42741-2

Datos para catalogación bibliográfica:
O'Neil, Peter V.
Matemáticas avanzadas para ingeniería, séptima edición
ISBN: 978-607-522-024-6

Visite nuestro sitio en:
http://latinoamerica.cengage.com

Impreso en México

1 2 3 4 5 6 7 17 16 15 14

Contenido

LA SERIE DE FOURIER DE UNA
FUNCION CONVERGENCIA DE UN
SERIE DE FOURIER SERIE DE FO
EN COSENOS EN SENOS INTEGRA

CAPÍTULO 1

La transformada de Laplace

1.1 Definición y propiedades básicas

En matemáticas se llama transformada al mecanismo que convierte un problema de un tipo a otro, este último presumiblemente más fácil de resolver. El modo de hacerlo es resolver primero el problema transformado, para después transformar de regreso y así obtener la solución del problema original. En el caso de la transformada de Laplace los problemas con valores iniciales a menudo son convertidos en problemas algebraicos, un proceso que se puede ilustrar del modo siguiente:

problema con valores iniciales

↓

problema algebraico

↓

solución del problema algebraico

↓

solución del problema con valores iniciales

DEFINICIÓN 1.1 ***Transformada de Laplace***

La transformada de Laplace $\mathfrak{L}[f]$ de f es una función definida por

$$\mathfrak{L}[f](s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt,$$

para todo s tal que esta integral converja.

La transformada de Laplace convierte una función f en una nueva función llamada $\mathfrak{L}[f]$. Con frecuencia t es la variable independiente para f y s para la variable independiente de $\mathfrak{L}[f]$. Así, $f(t)$ es la función f evaluada en t, y $\mathfrak{L}[f](s)$ es la función $\mathfrak{L}[f]$ evaluada en s.

Es necesario convenir en usar letras minúsculas para la función de la transformada de Laplace, y su letra mayúscula para la función que resulta. En esta notación,

$$F = \mathfrak{L}[f], \quad G = \mathfrak{L}[g], \quad H = \mathfrak{L}[h],$$

y así sucesivamente.

EJEMPLO 1.1

Sea $f(t) = e^{at}$, siendo a cualquier número real. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}[f](s) &= F(s) = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}\,dt = \int_0^\infty e^{(a-s)t}\,dt \\
&= \lim_{k\to\infty}\int_0^k e^{(a-s)t}\,dt = \lim_{k\to\infty}\left[\frac{1}{a-s}e^{(a-s)t}\right]_0^k \\
&= \lim_{k\to\infty}\left[\frac{1}{a-s}e^{(a-s)k} - \frac{1}{a-s}\right] \\
&= -\frac{1}{a-s} = \frac{1}{s-a}
\end{aligned}$$

siempre que $a - s < 0$, o $s > a$. La transformada de Laplace de $f(t) = e^{at}$ es $F(s) = 1/(s - a)$, definida por $s >$ a. ■

EJEMPLO 1.2

Sea $g(t) = \text{sen}(t)$. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}[g](s) &= G(s) = \int_0^\infty e^{-st}\,\text{sen}(t)\,dt \\
&= \lim_{k\to\infty}\int_0^k e^{-st}\,\text{sen}(t)\,dt \\
&= \lim_{k\to\infty}\left[-\frac{e^{-ks}\cos k + se^{-ks}\,\text{sen}\,k - 1}{s^2+1}\right] = \frac{1}{s^2+1}.
\end{aligned}$$

$G(s)$ está definida para todo $s > 0$. ■

Una transformada de Laplace pocas veces es calculada directamente refiriéndose a la definición e integrando. En lugar de ello se utilizan las tablas de transformadas de Laplace de las funciones de uso frecuente (como la tabla 1.1) o algún software. También existen métodos útiles para encontrar la transformada de Laplace de funciones desplazadas o trasladadas, funciones escalonadas, pulsos y otras funciones que aparecen en las aplicaciones.

La transformada de Laplace es lineal, saca factores constantes, y la transformada de una suma de funciones es la suma de las transformadas de esas funciones.

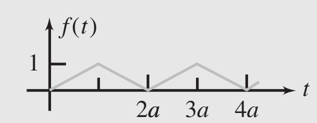
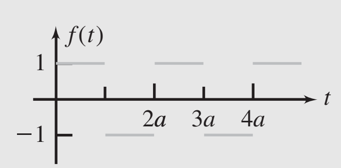
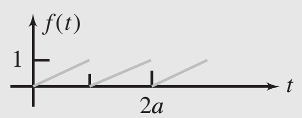
TABLA 1.1 ***Tabla de transformadas de Laplace de funciones***

	$f(t)$	$F(s) = \mathfrak{L}[f(t)](s)$
1.	1	$\frac{1}{s}$
2.	t	$\frac{1}{s^2}$
3.	$t^n (n = 1, 2, 3, \cdots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
4.	$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}$
5.	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
6.	te^{at}	$\frac{1}{(s-a)^2}$
7.	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
8.	$\frac{1}{a-b}(e^{at} - e^{bt})$	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$
9.	$\frac{1}{a-b}(ae^{at} - be^{bt})$	$\frac{s}{(s-a)(s-b)}$
10.	$\frac{(c-b)e^{at} + (a-c)e^{bt} + (b-a)e^{ct}}{(a-b)(b-c)(c-a)}$	$\frac{1}{(s-a)(s-b)(s-c)}$
11.	$\operatorname{sen}(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
12.	$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
13.	$1 - \cos(at)$	$\frac{a^2}{s(s^2+a^2)}$
14.	$at - \operatorname{sen}(at)$	$\frac{a^3}{s^2(s^2+a^2)}$
15.	$\operatorname{sen}(at) - at\cos(at)$	$\frac{2a^3}{(s^2+a^2)^2}$
16.	$\operatorname{sen}(at) + at\cos(at)$	$\frac{2as^2}{(s^2+a^2)^2}$
17.	$t\operatorname{sen}(at)$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$
18.	$t\cos(at)$	$\frac{(s^2-a^2)}{(s^2+a^2)^2}$
19.	$\frac{\cos(at) - \cos(bt)}{(b-a)(b+a)}$	$\frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$
20.	$e^{at}\operatorname{sen}(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$
21.	$e^{at}\cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
22.	$\operatorname{senh}(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
23.	$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
24.	$\operatorname{sen}(at)\cosh(at) - \cos(at)\operatorname{senh}(at)$	$\frac{4a^3}{s^4+4a^4}$
25.	$\operatorname{sen}(at)\operatorname{senh}(at)$	$\frac{2a^2 s}{s^4+4a^4}$

TABLA 1.1 *(continuación)*

	$f(t)$	$F(s) = \mathfrak{L}[f(t)](s)$
26.	$\operatorname{senh}(at) - \operatorname{sen}(at)$	$\dfrac{2a^3}{s^4 - a^4}$
27.	$\cosh(at) - \cos(at)$	$\dfrac{2a^2 s}{s^4 - a^4}$
28.	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{at}(1 + 2at)$	$\dfrac{s}{(s-a)^{3/2}}$
29.	$J_0(at)$	$\dfrac{1}{\sqrt{s^2 + a^2}}$
30.	$J_n(at)$	$\dfrac{1}{a^n} \dfrac{\left(\sqrt{s^2 + a^2} - s\right)^n}{\sqrt{s^2 + a^2}}$
31.	$J_0(2\sqrt{at})$	$\dfrac{1}{s} e^{-a/s}$
32.	$\dfrac{1}{t} \operatorname{sen}(at)$	$\tan^{-1}\left(\dfrac{a}{s}\right)$
33.	$\dfrac{2}{t}[1 - \cos(at)]$	$\ln\left(\dfrac{s^2 + a^2}{s^2}\right)$
34.	$\dfrac{2}{t}[1 - \cosh(at)]$	$\ln\left(\dfrac{s^2 - a^2}{s^2}\right)$
35.	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}} - ae^{a^2 t} \operatorname{erfc}\left(\dfrac{a}{\sqrt{t}}\right)$	$\dfrac{1}{\sqrt{s} + a}$
36.	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}} + ae^{a^2 t} \operatorname{erf}\left(\dfrac{a}{\sqrt{t}}\right)$	$\dfrac{\sqrt{s}}{s - a^2}$
37.	$e^{a^2 t} \operatorname{erf}(a\sqrt{t})$	$\dfrac{a}{\sqrt{s}(s - a^2)}$
38.	$e^{a^2 t} \operatorname{erfc}(a\sqrt{t})$	$\dfrac{1}{\sqrt{s}(\sqrt{s} + a)}$
39.	$\operatorname{erfc}\left(\dfrac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\dfrac{1}{s} e^{-a\sqrt{s}}$
40.	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-a^2/4t}$	$\dfrac{1}{\sqrt{s}} e^{-a\sqrt{s}}$
41.	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi(t + a)}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{s}} e^{as} \operatorname{erfc}(\sqrt{as})$
42.	$\dfrac{1}{\pi t} \operatorname{sen}(2a\sqrt{t})$	$\operatorname{erf}\left(\dfrac{a}{\sqrt{s}}\right)$
43.	$f\left(\dfrac{t}{a}\right)$	$aF(as)$
44.	$e^{bt/a} f\left(\dfrac{t}{a}\right)$	$aF(as - b)$
45.	$\delta_\epsilon(t)$	$\dfrac{e^{-\epsilon s}(1 - e^{-\epsilon s})}{\epsilon s}$
46.	$\delta(t - a)$	e^{-as}
47.	$L_n(t)$ (Polinomio de Laguerre)	$\dfrac{1}{s}\left(\dfrac{s-1}{s}\right)^n$

TABLA 1.1 ***(continuación)***

	$f(t)$	$F(s) = \mathfrak{L}[f(t)](s)$
48.	$\frac{n!}{(2n)!\sqrt{\pi t}} H_{2n}(t)$ (Polinomio de Hermite)	$\frac{(1-s)^n}{s^{n+1/2}}$
49.	$\frac{-n!}{\sqrt{\pi}(2n+1)!} H_{2n+1}(t)$ (Polinomio de Hermite)	$\frac{(1-s)^n}{s^{n+3/2}}$
50.	onda triangular 	$\frac{1}{as^2}\left[\frac{1-e^{-as}}{1+e^{-as}}\right]\left(=\frac{1}{as^2}\tanh\left(\frac{as}{2}\right)\right)$
51.	onda cuadrada 	$\frac{1}{s}\tanh\left(\frac{as}{2}\right)$
52.	onda serrucho 	$\frac{1}{as^2} - \frac{e^{-as}}{s(1-e^{-as})}$

Fórmulas operacionales

$f(t)$	$F(s)$
$af(t) + bg(t)$	$aF(s) + bG(s)$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0+)$
$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$
$\int_0^t f(\tau)\,d\tau$	$\frac{1}{s} F(s)$
$tf(t)$	$-F'(s)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
$\frac{1}{t} f(t)$	$\int_s^\infty F(\sigma)\,d\sigma$
$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$
$f(t-a)H(t-a)$	$e^{-as} F(s)$
$f(t+\tau) = f(t)$ (periódica)	$\frac{1}{1-e^{-\tau s}} \int_0^\tau e^{-st} f(t)\,dt$

TEOREMA 1.1 Linealidad de la transformada de Laplace

Suponga que $\mathfrak{L}[f](s)$ y $\mathfrak{L}[g](s)$ están definidas para $s > a$, y α y β son números reales. Entonces

$$\mathfrak{L}[\alpha f + \beta g](s) = \alpha F(s) + \beta G(s)$$

para $s > a$.

Prueba Por hipótesis, $\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$ y $\int_0^\infty e^{-st} g(t)\,dt$ convergen para $s > a$. Entonces

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}[\alpha f + \beta g](s) &= \int_0^\infty e^{-st}(\alpha f(t) + \beta g(t))\,dt \\ &= \alpha \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt + \beta \int_0^\infty e^{-st} g(t)\,dt = \alpha F(s) + \beta G(s)\end{aligned}$$

para $s > a$. ■

Esta conclusión se extiende para cualquier suma finita:

$$\mathfrak{L}[\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n](s) = \alpha_1 F_1(s) + \cdots + \alpha_n F_n(s),$$

para todo s tal que cada $F_j(s)$ esté definida.

No toda función tiene una transformada de Laplace, ya que $\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$ puede no converger para cualquier valor real de s. Considere condiciones sobre f para asegurar que f tiene una transformada de Laplace.

Una condición necesaria obvia es que $\int_0^k e^{-st} f(t)\,dt$ tiene que estar definida para todo $k > 0$, ya que $\mathfrak{L}[f](s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$. Para que esto suceda, es suficiente que f sea continua a pedazos en $[0, k]$ para todo número k positivo. Definiremos este concepto en términos generales ya que también aparece en otros contextos.

DEFINICIÓN 1.2 Continuidad a pedazos

f es continua a pedazos en $[a, b]$ si hay puntos

$$a < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < b$$

tal que f es continua en cada intervalo abierto (a, t_1), (t_{j-1}, t_j) y (tn, b) y todos los límites laterales siguientes son finitos:

$$\lim_{t\to a+} f(t), \quad \lim_{t\to t_j-} f(t), \quad \lim_{t\to t_j+} f(t) \quad \text{y} \quad \lim_{t\to b-} f(t).$$

Esto significa que f es continua en $[a, b]$ excepto quizá en un número finito de puntos, en cada uno de los cuales f tiene límites laterales finitos en todo el intervalo. Las únicas discontinuidades que una función continua a pedazos f puede tener en $[a, b]$ son un número finito de saltos de discontinuidades (huecos de anchura finita en la gráfica). La figura 1.1 muestra discontinuidades de saltos típicos en una gráfica.

Por ejemplo, sea

$$f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{para } 0 \le t \le 2 \\ 2 & \text{en } t = 2 \\ 1 & \text{para } 2 < t \le 3 \\ -1 & \text{para } 3 < t \le 4 \end{cases}$$

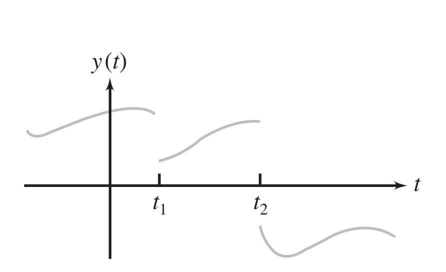


FIGURA 1.1 *Una función con discontinuidades de saltos en t_1 y t_2.*

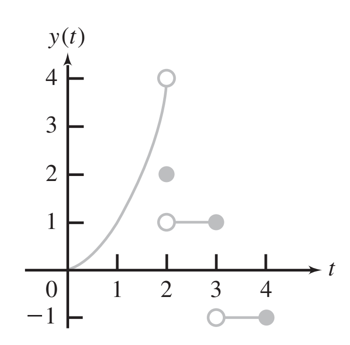


FIGURA 1.2

$$f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{si } 0 \leq t < 2 \\ 2 & \text{si } t = 2 \\ 1 & \text{si } 2 < t \leq 3 \\ -1 & \text{si } 3 < t \leq 4 \end{cases}$$

Entonces f es continua $[0, 4]$ excepto en 2 y 3, donde f tiene un salto de discontinuidad. En la figura 1.2 se muestra la gráfica de esta función.

Si f es continua a pedazos en $[0, k]$, entonces $e^{-st}f(t)$ también lo es y $\int_0^k e^{-st}f(t)\,dt$ existe.

La existencia de $\int_0^k e^{-st}f(t)\,dt$ para todo k positivo no asegura la existencia de $\lim_{k\to\infty}\int_0^k e^{-st}f(t)\,dt$. Por ejemplo, $f(t) = e^{t^2}$ es continua en todo intervalo $[0, k]$, pero $\int_0^\infty e^{-st}e^{t^2}\,dt$ diverge para todo valor real de s. Así, para la convergencia de $\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$, es necesaria otra condición sobre f. La forma de esta integral sugiere una condición que es suficiente. Si, para algunos números M y b, se tiene $|f(t)| \leq Me^{bt}$, entonces

$$e^{-st}|f(t)| \leq Me^{(b-s)t} \quad \text{para } s \geq b.$$

No obstante

$$\int_0^\infty Me^{(b-s)t}\,dt$$

converge (a $M/(s-b)$) si $b - s < 0$, o $s > b$. Entonces, por comparación, $\int_0^\infty e^{-st}|f(t)|\,dt$ también converge si $s > b$, de donde $\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$ converge si $s > b$.

El resultado de este razonamiento sugiere que existe un conjunto de condiciones que son indicadoras de que una función dada tiene una transformada de Laplace.

TEOREMA 1.2 *Existencia de $\mathfrak{L}[f]$*

Suponga que f es continua a pedazos en $[0, k]$ para todo k positivo. También que existen números M y b, tales que $|f(t)| \leq Me^{bt}$ para $t \geq 0$. Entonces $\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$ converge para $s > b$, por tanto $\mathfrak{L}[f](s)$ está definida para $s > b$. ■

Muchas funciones satisfacen estas condiciones, incluyendo las polinomiales, sen(at), cos(at), e^{at} y otras.

Las condiciones del teorema son suficientes, pero no necesarias para que una función tenga una transformada de Laplace. Por ejemplo, considere $f(t) = t^{-1/2}$ para $t > 0$. Esta función no es continua a

pedazos en ningún $[0, k]$ ya que $\lim_{t \to 0+} t^{-1/2} = \infty$. Sin embargo, $\int_0^k e^{-st} t^{-1/2}\, dt$ existe para todo k y $s > 0$ positivos. Más aún,

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}[f](s) &= \int_0^\infty e^{-st} t^{-1/2}\, dt = 2\int_0^\infty e^{-sx^2}\, dx \qquad (\text{sea } x = t^{1/2})\\ &= \frac{2}{\sqrt{s}} \int_0^\infty e^{-z^2}\, dz \qquad (\text{sea } z = x\sqrt{s})\\ &= \sqrt{\frac{\pi}{s}},\end{aligned}$$

en donde usó el hecho (encontrado en algunas tablas de integración usuales) que $\int_0^\infty e^{-z^2}\, dz = \pi/2$.

Ahora revise el diagrama de flujo que aparece al inicio de este capítulo. El primer paso en la resolución de este tipo de problemas es tomar la transformada de Laplace de una función. El final del diagrama de flujo sugiere que en algún punto debe poder regresar por otro camino. Después de encontrar alguna función $G(s)$, necesita obtener una función g cuya transformada de Laplace sea G. Este es el proceso de tomar una transformada de Laplace inversa.

DEFINICIÓN 1.3 Función G

Dada una función G, una función g tal que $\mathfrak{L}[g] = G$ se llama una transformada inversa de Laplace de G.

En este caso

$$g = \mathfrak{L}^{-1}[G].$$

Por ejemplo,

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right](t) = e^{at}$$

y

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right](t) = \text{sen}(t).$$

El proceso inverso es ambiguo ya que, dada G, puede haber muchas funciones cuya transformada de Laplace sea G. Por ejemplo, sabe que la transformada de Laplace de e^{-t} es $1/(s+1)$ para $s > -1$. Sin embargo, si cambia $f(t)$ sólo en un punto, haciendo

$$h(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{para } t \neq 3 \\ 0 & \text{para } t = 3, \end{cases}$$

entonces $\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-st} h(t)\, dt$ y h tienen la misma transformada de Laplace que f. En tal caso, ¿cuál es la transformada inversa de Laplace de $1/(s+1)$?

Una respuesta la da el teorema de Lerch, el cual establece que dos funciones continuas que tienen la misma transformada de Laplace deben ser iguales.

TEOREMA 1.3 Lerch

Sean f y g continuas en $[0, \infty)$ y suponga que $\mathfrak{L}[f] = \mathfrak{L}[g]$. Entonces $f = g$. ■

En vista de esto, resuelva parcialmente la ambigüedad al tomar la transformada inversa de Laplace aceptando que, dada $F(s)$, busca una f continua cuya transformada de Laplace sea F. Si no hay una función transformada inversa continua, entonces debe tomar ciertos acuerdos para decidir a cuál de las candidatas posibles llamará $\mathfrak{L}^{-1}[F]$. Ya en aplicaciones el contexto hace frecuentemente esta elección obvia.

Gracias a su linealidad, la inversa de la transformada de Laplace es también lineal.

TEOREMA 1.4

Si $\mathfrak{L}^{-1}[F] = f$ y $\mathfrak{L}^{-1}[G] = g$, y α y β son números reales, entonces

$$\mathfrak{L}^{-1}[\alpha F + \beta G] = \alpha f + \beta g. \quad ■$$

Si usa la tabla 1.1 para encontrar $\mathfrak{L}[f]$, busque f en la columna izquierda y lea $\mathfrak{L}[f]$ de la columna derecha. Para $\mathfrak{L}^{-1}[F]$, busque F en la columna derecha y relaciónela con f en la izquierda.

SECCIÓN 1.1 PROBLEMAS

En cada uno de los problemas del 1 al 10, use la linealidad de la transformada de Laplace y la tabla 1.1 para encontrar la transformada de Laplace de la función.

1. $2\,\mathrm{senh}(t) - 4$

2. $\cos(t) - \mathrm{sen}(t)$

3. $4t\,\mathrm{sen}(2t)$

4. $t^2 - 3t + 5$

5. $t - \cos(5t)$

6. $2t^2e^{-3t} - 4t + 1$

7. $(t + 4)^2$

8. $3e^{-t} + \mathrm{sen}(6t)$

9. $t^3 - 3t + \cos(4t)$

10. $-3\cos(2t) + 5\,\mathrm{sen}(4t)$

En cada uno de los problemas del 11 al 18, use la linealidad de la transformada inversa de Laplace y la tabla 1.1 para encontrar la transformada inversa de Laplace (continua) de la función.

11. $\dfrac{-2}{s+16}$

12. $\dfrac{4s}{s^2-14}$

13. $\dfrac{2s-5}{s^2+16}$

14. $\dfrac{3s+17}{s^2-7}$

15. $\dfrac{3}{s-7} + \dfrac{1}{s^2}$

16. $\dfrac{5}{(s+7)^2}$

17. $\dfrac{1}{s-4} - \dfrac{6}{(s-4)^2}$

18. $\dfrac{2}{s^4}\left[\dfrac{1}{s} - \dfrac{3}{s^2} + \dfrac{4}{s^6}\right]$

Suponga que $f(t)$ está definida para todo $t \geq 0$. Entonces f es *periódica* con periodo T si $f(t + T) = f(t)$ para todo $t \geq 0$. Por ejemplo, $\mathrm{sen}(t)$ tiene periodo 2π. En los problemas 19–22, suponga que f tiene periodo T.

19. Pruebe que

$$\mathfrak{L}[f](s) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} e^{-st} f(t)\,dt.$$

20. Pruebe que

$$\int_{nT}^{(n+1)T} e^{-st} f(t)\,dt = e^{-nsT} \int_0^T e^{-st} f(t)\,dt.$$

21. Para los problems 19 y 20, pruebe que

$$\mathfrak{L}[f](s) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nsT}\right] \int_0^T e^{-st} f(t)\,dt.$$

22. Use la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1/(1-r)$ para $|r| < 1$, junto al resultado del problema 21, para probar que

$$\mathfrak{L}[f](s) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t)\,dt.$$

En cada uno de los problemas del 23 al 30, se da una función periódica, algunas veces con una gráfica. Encuentre $\mathfrak{L}[f]$, usando el resultado del problema 22.

23. f tiene periodo 6 y $f(t) = \begin{cases} 5 & \text{para } 0 < t \leq 3 \\ 0 & \text{para } 3 < t \leq 6 \end{cases}$

24. $f(t) = |E \operatorname{sen}(\omega t)|$, con E y ω constantes positivas. (Aquí f tiene periodo π/ω).

25. f tiene la gráfica de la figura 1.3.

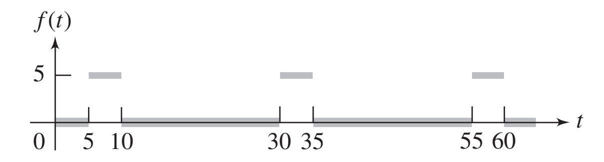


FIGURA 1.3

26. f tiene la gráfica de la figura 1.4.

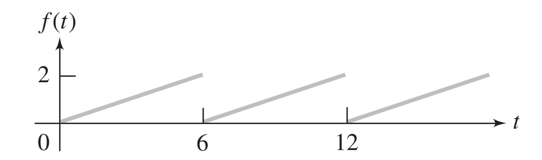


FIGURA 1.4

27. f tiene la gráfica de la figura 1.5.

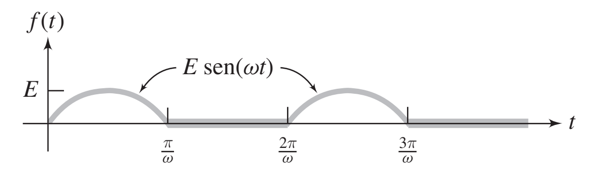


FIGURA 1.5

28. f tiene la gráfica de la figura 1.6.

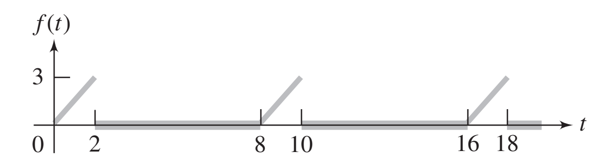


FIGURA 1.6

29. f tiene la gráfica de la figura 1.7.

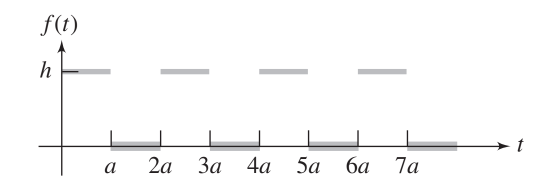


FIGURA 1.7

30. f tiene la gráfica de la figura 1.8.

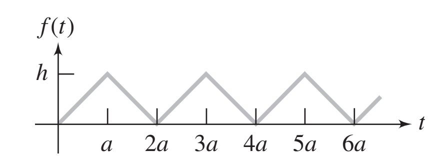


FIGURA 1.8

1.2 Solución de problemas con valores iniciales usando la transformada de Laplace

La transformada de Laplace es una herramienta poderosa para resolver cierto tipo de problemas con valores iniciales. La técnica depende del siguiente hecho acerca de la transformada de Laplace de una derivada.

TEOREMA 1.5 *Transformada de Laplace de una derivada*

Sea f continua en $[0, \infty)$ y suponga que f' es continua a pedazos en $[0, k]$ para todo k positivo. Suponga también que $\lim_{k\to\infty} e^{-sk} f(k) = 0$ si $s > 0$. Entonces

$$\mathfrak{L}[f'](s) = sF(s) - f(0). \tag{1.1}$$

Esto es, la transformada de Laplace de la derivada de f es s veces la transformada de Laplace de f en s, menos f en cero.

Prueba Empiece con una integración por partes, con $u = e^{-st}$ y $dv = f'(t)\,dt$. Para $k > 0$,

$$\int_0^k e^{-st} f'(t)\,dt = [e^{-st} f(t)]_0^k - \int_0^k -se^{-st} f(t)\,dt$$
$$= e^{-sk} f(k) - f(0) + s\int_0^k e^{-st} f(t)\,dt.$$

Tome el límite conforme $k \to \infty$ y use la suposición que $e^{-sk}f(k) \to 0$ para obtener

$$\mathfrak{L}[f'](s) = \lim_{k\to\infty}\left[e^{-sk} f(k) - f(0) + s\int_0^k e^{-st} f(t)\,dt\right]$$
$$= -f(0) + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = -f(0) + sF(s). \blacksquare$$

Si f tiene una discontinuidad de salto en 0 (por ejemplo, como ocurre, si f es una fuerza electromotriz que es encendida en el tiempo cero), entonces esta conclusión puede corregirse para obtener

$$\mathfrak{L}[f'](s) = sF(s) - f(0+),$$

donde

$$f(0+) = \lim_{t\to 0+} f(t)$$

es el límite lateral por la derecha de $f(t)$ en 0.

Para problemas que involucran ecuaciones diferenciales de segundo orden o mayor, necesita una versión del teorema para derivadas superiores. $f^{(j)}$ denota la j-ésima derivada de f. Denotamos $f^{(0)} = f$.

TEOREMA 1.6 *Transformada de Laplace de una derivada superior*

Suponga que $f, f', \cdots, f^{n-1}$ son continuas en [0, 1), y $f^{(n)}$ es continua a pedazos en $[0, k]$ para todo k positivo. También que $\lim_{k\to\infty} e^{-sk}f^{(j)}(k) = 0$ para $s > 0$ y para $j = 1, 2, \ldots, n-1$. Entonces

$$\mathfrak{L}[f^{(n)}](s) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0). \blacksquare \quad (1.2)$$

El caso de la segunda derivada ($n = 2$) aparece con tanta frecuencia que conviene ponerla por separado. Bajo las condiciones del teorema,

$$\mathfrak{L}[f''](s) = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0). \quad (1.3)$$

A continuación se usará la transformada de Laplace para resolver ciertos problemas con valores iniciales.

EJEMPLO 1.3

Resolver $y' - 4y = 1$; $y(0) = 1$.

Ya sabe cómo resolver este problema, pero use la transformada de Laplace para ilustrar la técnica. Escriba $\mathfrak{L}[y](s) = Y(s)$. Tomamos la transformada de Laplace de la ecuación diferencial, usando la linealidad de $\mathfrak{L}$ y la ecuación (1.1), con $y(t)$ en lugar de $f(t)$:

$$\mathfrak{L}[y' - 4y](s) = \mathfrak{L}[y'](s) - 4\mathfrak{L}[y](s)$$
$$= (sY(s) - y(0)) - 4Y(s) = \mathfrak{L}[1](s) = \frac{1}{s}.$$

Aquí use el hecho (de la tabla 1.1) que $\mathfrak{L}[1](s) = 1/s$ para $s > 0$. Como $y(0) = 1$, ahora tiene

$$(s-4)Y(s) = y(0) + \frac{1}{s} = 1 + \frac{1}{s}.$$

En este punto debe resolver un problema algebraico para $Y(s)$, obteniendo

$$Y(s) = \frac{1}{(s-4)} + \frac{1}{s(s-4)}$$

(observe el diagrama de flujo del inicio de este capítulo). La solución del problema con valores iniciales es

$$y = \mathfrak{L}^{-1}[Y] = \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-4}\right] + \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s-4)}\right].$$

De la entrada 5 de la tabla 1.1, con $a = 4$,

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-4}\right] = e^{4t}.$$

Y de la entrada 8, con $a = 0$ y $b = 4$,

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s-4)}\right] = \frac{1}{-4}(e^{0t} - e^{4t}) = \frac{1}{4}(e^{4t} - 1).$$

La solución del problema con valores iniciales es

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{4t} + \frac{1}{4}(e^{4t} - 1) \\ &= \frac{5}{4}e^{4t} - \frac{1}{4}. \blacksquare \end{aligned}$$

Una característica de esta técnica de la transformada de Laplace es que el valor inicial dado en el problema es incorporado naturalmente en el proceso de solución a través de la ecuación (1.1). No necesita encontrar la solución general primero, y después resolver para que la constante satisfaga la condición inicial.

EJEMPLO 1.4

Resolver

$$y'' + 4y' + 3y = e^t; \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 2.$$

Aplique $\mathfrak{L}$ a la ecuación diferencial para obtener $\mathfrak{L}[y''] + 4\mathfrak{L}[y'] + 3\mathfrak{L}[y] = \mathfrak{L}[e^t]$.

Ahora

$$\mathfrak{L}[y''] = s^2Y - sy(0) - y'(0) = s^2Y - 2$$

y

$$\mathfrak{L}[y'] = sY - y(0) = sY.$$

Por tanto,

$$s^2Y - 2 + 4sY + 3Y = \frac{1}{s-1}.$$

Resuelva para Y obteniendo

$$Y(s) = \frac{2s - 1}{(s-1)(s^2+4s+3)}.$$

La solución es la transformada inversa de Laplace de esta función. Algunos software pueden encontrar esta inversa. Si quiere usar la tabla 1.1, debe aplicar una descomposición en fracciones parciales para escribir $Y(s)$ como una suma de funciones más simples. Escriba

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{2s-1}{(s-1)(s^2+4s+3)} \\ &= \frac{2s-1}{(s-1)(s+1)(s+3)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+3}. \end{aligned}$$

Esta ecuación se satisface sólo si, para todo s,

$$A(s+1)(s+3) + B(s-1)(s+3) + C(s-1)(s+1) = 2s - 1.$$

Ahora elija valores de s para simplificar la tarea de determinar A, B y C. Sea $s = 1$ para obtener $8A = 1$, así $A = \frac{1}{8}$. Sea $s = -1$ para obtener $-4B = -3$, de manera que $B = \frac{3}{4}$. Elija $s = -3$ para obtener $8C = -7$, así $C = -\frac{7}{8}$. Entonces

$$Y(s) = \frac{1}{8}\frac{1}{s-1} + \frac{3}{4}\frac{1}{s+1} - \frac{7}{8}\frac{1}{s+3}.$$

Ahora lea de la tabla 1.1 que

$$y(t) = \frac{1}{8}e^{t} + \frac{3}{4}e^{-t} - \frac{7}{8}e^{-3t}. \blacksquare$$

De nuevo, la transformada de Laplace ha convertido un problema con valores iniciales en un problema algebraico, incorporando las condiciones iniciales en las manipulaciones algebraicas. Una vez que obtiene $Y(s)$, el problema se convierte en uno de invertir la función transformada para obtener $y(t)$.

La ecuación (1.1) tiene una consecuencia interesante que será útil más adelante. Bajo las condiciones del teorema, sabe que

$$\mathfrak{L}[f'] = s\mathfrak{L}[f] - f(0).$$

Suponga que $f(t)$ está definida por una integral, a saber

$$f(t) = \int_0^t g(\tau)\, d\tau.$$

Ahora $f(0) = 0$ y, suponiendo la continuidad de g, $f'(t) = g(t)$. Entonces

$$\mathfrak{L}[f'] = \mathfrak{L}[g] = s\mathfrak{L}\left[\int_0^t g(\tau)\, d\tau\right].$$

Esto significa que

$$\mathfrak{L}\left[\int_0^t g(\tau)\, d\tau\right] = \frac{1}{s}\mathfrak{L}[g], \tag{1.4}$$

permite aplicar la transformada de Laplace de una función definida por una integral. Use esta ecuación más adelante al trabajar con circuitos que tienen fuerzas electromotrices discontinuas.

En las siguientes tres secciones analizaremos algunas herramientas necesarias para aplicar la transformada de Laplace a problemas en los que los métodos anteriores con frecuencia son menos útiles.

SECCIÓN 1.2 PROBLEMAS

En cada uno de los problemas del 1 al 10, use la transformada de Laplace para resolver el problema con valores iniciales.

1. $y' + 4y = 1;\ y(0) = -3$

2. $y' - 9y = t\ ;\ y(0) = 5$

3. $y' + 4y = \cos(t);\ y(0) = 0$

4. $y' + 2y = e^{-t}\ ;\ y(0) = 1$

5. $y' - 2y = 1 - t\ ;\ y(0) = 4$

6. $y'' + y = 1;\ y(0) = 6,\ y'(0) = 0$

7. $y'' - 4y' + 4y = \cos(t);\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1$

8. $y'' + 9y = t^2;\ y(0) = y'(0) = 0$

9. $y'' + 16y = 1 + t\ ;\ y(0) = -2,\ y'(0) = 1$

10. $y'' - 5y' + 6y = e^{-t}\ ;\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2$

11. Suponga que f satisface las hipótesis del teorema 1.5, excepto para la discontinuidad de salto en 0. Pruebe que $\mathfrak{L}[f'](s) = sF(s) - f(0+)$, donde $f(0+) = \text{lím}_{t\to 0+} f(t)$.

12. Suponga que f satisface las hipótesis del teorema 1.5 para la discontinuidad de salto en un número c positivo. Pruebe que

$$\mathfrak{L}[f'](s) = sF(s) - f(0) - e^{-cs}\,[f(c+) - f(c-)],$$

donde $f(c-) = \text{lím}_{t\to c-} f(t)$.

13. Suponga que g es continua a pedazos en $[0, k]$ para todo $k > 0$, y que existen números, M, b y a tales que $|g(t)| \leq Me^{bt}$ para $t \geq a$. Sea $\mathfrak{L}[G] = g$. Pruebe que

$$\mathfrak{L}\left[\int_0^t g(w)\,dw\right](s) = \frac{1}{s}G(s) - \frac{1}{s}\int_0^a g(w)\,dw.$$

1.3 Teoremas de corrimiento y la función de Heaviside

Una motivación para desarrollar la transformada de Laplace es extender la clase de problemas que puede resolver. Los métodos de los capítulos 1 y 2 apuntan principalmente a problemas que conciernen a funciones continuas. Pero muchos modelos matemáticos tratan con procesos discontinuos (por ejemplo, prender y apagar un circuito). Para esto la transformada de Laplace es efectiva, pero debe aprender más acerca de la representación de funciones discontinuas y aplicarles tanto la transformada de Laplace como su inversa.

1.3.1 El primer teorema de corrimiento

La transformada de Laplace de $e^{at} f(t)$ es sólo la transformada de Laplace de $f(t)$, recorrida a unidades a la derecha. Esto se logra reemplazando s por $s - a$ en $F(s)$ para obtener $F(s - a)$.

TEOREMA 1.7 Primer teorema de corrimiento, o corrimiento en la variable s

Sea $\mathfrak{L}[f](s) = F(s)$ para $s > b \geq 0$. Sea a cualquier número. Entonces

$$\mathfrak{L}[e^{at} f(t)](s) = F(s - a) \qquad \text{para } s > a + b$$

Prueba Calcule

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}[e^{at} f(t)](s) &= \int_0^\infty e^{at} e^{-st} f(s)\,ds \\ &= \int_0^\infty e^{-(s-a)t} f(t)\,dt = F(s - a)\end{aligned}$$

para $s - a > b$, o $s > a + b$. ■

CAPÍTULO 3

La integral de Fourier y las transformadas de Fourier

3.1 La integral de Fourier

Si $f(x)$ está definida en un intervalo $[-L, L]$, puede representarla, al menos en la "mayoría" de los puntos en este intervalo por una serie de Fourier. Si f es periódica, entonces puede representarla por su serie de Fourier en intervalos a lo largo de toda la recta real.

Ahora suponga que $f(x)$ está definida para todo x pero no es periódica. Entonces, no es posible representar a $f(x)$ por una serie de Fourier sobre toda la recta. Sin embargo, sí puede escribir una representación en términos de senos y cosenos usando una integral en lugar de una sumatoria. Para ver cómo se hace esto, suponga que f es absolutamente integrable, lo que significa que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx$ converge y que f es suave a pedazos en todo intervalo $[-L, L]$. Escriba la serie de Fourier de f en un intervalo arbitrario $[-L, L]$, incluyendo las fórmulas integrales de los coeficientes:

$$\frac{1}{2}\int_{-L}^{L} f(\xi)\, d\xi + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(\xi)\cos\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right) d\xi\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(\xi)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right) d\xi\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right].$$

Quiere hacer que $L \to \infty$ para obtener una representación de $f(x)$ sobre toda la recta. Para ver a qué límite tiende esta serie de Fourier, si lo hay, sea

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L}$$

y

$$\omega_n - \omega_{n-1} = \frac{\pi}{L} = \Delta\omega.$$

Entonces la serie de Fourier en $[-L, L]$ puede escribirse como

$$\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-L}^{L} f(\xi)\,d\xi\right)\Delta\omega + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(\xi)\cos(\omega_n\xi)\,d\xi\right)\cos(\omega_n x)\right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(\xi)\,\mathrm{sen}(\omega_n\xi)\,d\xi\right)\mathrm{sen}(\omega_n x)\right]\Delta\omega. \tag{3.1}$$

Ahora $L \to \infty$, lo que implica que $\Delta\omega \to 0$. En la última expresión,

$$\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-L}^{L} f(\xi)\,d\xi\right)\Delta\omega \to 0$$

debido a que, por hipótesis, $\int_{-L}^{L} f(\xi)d\xi$ converge. Los otros términos en la expresión (3.1) se parecen a una suma de Riemann para una integral definida, y asegura que cuando $L \to \infty$ y $\Delta\omega \to 0$, esta expresión tiende al límite

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos(\omega\xi)\,d\xi\right)\cos(\omega x)\right.$$
$$\left. + \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\,\mathrm{sen}(\omega\xi)\,d\xi\right)\mathrm{sen}(\omega x)\right]d\omega.$$

Esta es la *integral de Fourier* de f en la recta real. Bajo las hipótesis hechas acerca de f, esta integral converge a

$$\frac{1}{2}\left(f(x-) + f(x+)\right)$$

en cada x. En particular, si f es continua en x, entonces esta integral converge a $f(x)$.

Frecuentemente esta integral de Fourier se escribe

$$\int_{0}^{\infty}[A_\omega\cos(\omega x) + B_\omega\,\mathrm{sen}(\omega x)]\,d\omega, \tag{3.2}$$

en donde los coeficientes de la integral de Fourier de f son

$$A_\omega = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos(\omega\xi)\,d\xi$$

y

$$B_\omega = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\,\mathrm{sen}(\omega\xi)\,d\xi.$$

Esta representación en integral de Fourier de $f(x)$ es enteramente análoga a la serie de Fourier en un intervalo reemplazando con $\int_0^\infty \cdots d\omega$ a $\sum_{n=1}^{\infty}$ si se tienen coeficientes con fórmulas integrales. Estos coeficientes son funciones de ω, que es la variable de integración en la integral de Fourier (3.2).

EJEMPLO 3.1

Sea

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } -1 \le x \le 1 \\ 0 & \text{para } |x| > 1 \end{cases}$$

y

x

−1 1

FIGURA 3.1

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } -1 \le x \le 1 \\ 0 & \text{para } |x| > 1 \end{cases}$$

La figura 3.1 es la gráfica de f. Por supuesto f es suave a pedazos y $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx$ converge. Los coeficientes de Fourier de f son

$$A_\omega = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \cos(\omega\xi)\, d\xi = \frac{2\,\text{sen}(\omega)}{\pi\omega}$$

y

$$B_\omega = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \text{sen}(\omega\xi)\, d\xi = 0.$$

La integral de Fourier de f es

$$\int_0^\infty \frac{2\,\text{sen}(\omega)}{\pi\omega}\cos(\omega x)\, d\omega.$$

Debido a que f es suave a pedazos, ésta converge a $\frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$ para todo x. Más explícitamente,

$$\int_0^\infty \frac{2\,\text{sen}(\omega)}{\pi\omega}\cos(\omega x)\, d\omega = \begin{cases} 1 & \text{para } -1 < x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{para } x = \pm 1 \\ 0 & \text{para } |x| > 1 \end{cases}$$

Hay otra expresión para la integral de Fourier de una función que algunas veces resulta más conveniente. Escriba

$$\begin{aligned}\int_0^\infty [A_\omega \cos(\omega x) + B_\omega \,\text{sen}(\omega x)]\, d\omega &= \int_0^\infty \left[\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos(\omega\xi)\, d\xi\right)\cos(\omega x)\right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\,\text{sen}(\omega\xi)\, d\xi\right)\text{sen}(\omega x)\right] d\omega \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)[\cos(\omega\xi)\cos(\omega x) + \text{sen}(\omega\xi)\,\text{sen}(\omega x)]\, d\xi\, d\omega \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos(\omega(\xi - x))\, d\xi\, d\omega. \qquad (3.3)\end{aligned}$$

Por supuesto, esta integral tiene las mismas propiedades de convergencia que la expresión integral (3.2), ya que sólo es un rearreglo de esa integral.

SECCIÓN 3.1 PROBLEMAS

En cada problema del 1 al 10, desarrolle la función en una integral de Fourier y determine a qué converge esta integral.

1. $f(x) = \begin{cases} x & \text{para } -\pi \le x \le \pi \\ 0 & \text{para } |x| > \pi \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} k & \text{para } -10 \le x \le 10 \\ 0 & \text{para } |x| > 10 \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{para } -\pi \le x \le 0 \\ 1 & \text{para } 0 < x \le \pi \\ 0 & \text{para } |x| > \pi \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x) & \text{para } -4 \le x \le 0 \\ \cos(x) & \text{para } 0 < x \le 4 \\ 0 & \text{para } |x| > 4 \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{para } -100 \le x \le 100 \\ 0 & \text{para } |x| > 100 \end{cases}$

6. $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{para } -\pi \le x \le 2\pi \\ 0 & \text{para } x < -\pi \quad \text{y para } x > 2\pi \end{cases}$

7. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x) & \text{para } -3\pi \le x \le \pi \\ 0 & \text{para } x < -3\pi \quad \text{y para } x > \pi \end{cases}$

8. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{para } -5 \le x < 1 \\ 1 & \text{para } 1 \le x \le 5 \\ 0 & \text{para } |x| > 5 \end{cases}$

9. $f(x) = e^{-|x|}$

10. $f(x) = xe^{-|4x|}$

11. Pruebe que la integral de Fourier de f puede escribirse como

$$\lim_{\omega \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\operatorname{sen}(\omega(t-x))}{t-x}\, dt.$$

3.2 Integrales de Fourier en cosenos y senos

Si f es suave a pedazos en la semirecta $[0, \infty)$ y $\int_0^\infty |f(\xi)|\, d\xi$ converge, entonces puede escribir la integral de Fourier en cosenos o en senos para f que es completamente análoga a los desarrollos en senos y cosenos de una función en un intervalo $[0, L]$.

Para escribir una integral en cosenos, extienda f a una función par f_e definida en toda la recta real haciendo

$$f_e(x) = \begin{cases} f(x) & \text{para } x \ge 0 \\ f(-x) & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

Esto refleja la gráfica para $x \ge 0$ en el eje vertical. Debido a que f_e es una función par, su integral de Fourier sólo tiene términos en cosenos. Como $f_e(x) = f(x)$ para $x \ge 0$, se puede definir esta integral en cosenos como la integral de Fourier en cosenos de f en $[0, \infty)$.

El coeficiente de f_e en su desarrollo integral de Fourier es

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_e(\xi) \cos(\omega\xi)\, d\xi$$

y esto es

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(\xi) \cos(\omega\xi)\, d\xi.$$

Esto sugiere la siguiente definición.

DEFINICIÓN 3.1 Integral de Fourier en cosenos

Sea f definida en $[0, \infty)$ y $\int_0^\infty |f(\xi)|\, d\xi$ convergente. La integral de Fourier en cosenos de f es

$$\int_0^\infty A_\omega \cos(\omega x)\, d\omega,$$

en donde

$$A_\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(\xi) \cos(\omega\xi)\, d\xi.$$

Al aplicar el teorema de convergencia del desarrollo integral de f_e, encuentre que si f es continua a pedazos en cada intervalo $[0, L]$, entonces su desarrollo integral en cosenos converge a $\frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$ para cada $x > 0$ y a $f(0)$ para $x = 0$. En particular, en cualquier x positiva, en el cual f es continua, la integral en cosenos converge a $f(x)$.

Al extender f a una función impar f_o, de manera semejante a como lo hizo con las series, obtiene una integral de Fourier para f_o la cual sólo tiene términos en senos. Debido a que $f_o(x) = f(x)$ para $x \geq 0$, esto da una integral en senos para f en $[0, \infty)$.

DEFINICIÓN 3.2 Integral de Fourier en senos

Sea f definida en $[0, \infty)$ y $\int_0^\infty |f(\xi)|\, d\xi$ convergente. La integral de Fourier en senos de f es

$$\int_0^\infty A_\omega \operatorname{sen}(\omega x)\, d\omega,$$

en donde,

$$A_\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(\xi) \operatorname{sen}(\omega\xi)\, d\xi.$$

Si f es suave a pedazos en todo intervalo $[0, L]$, entonces esta integral converge a $\frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$ en $(0, \infty)$. Así como con la serie de Fourier en senos en un intervalo acotado, esta integral de Fourier en senos converge a 0 en $x = 0$.

EJEMPLO 3.2 Integrales de Laplace

Sea $f(x) = e^{-kx}$ para $x \geq 0$, con k una constante positiva. Entonces f es continuamente diferenciable en cualquier intervalo $[0, L]$, y

$$\int_0^\infty e^{-kx}\, dx = \frac{1}{k}.$$

Para la integral de Fourier en cosenos, calcule los coeficientes

$$A_\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-k\xi} \cos(\omega\xi)\, d\xi = \frac{2}{\pi} \frac{k}{k^2 + \omega^2}.$$

La representación de la integral de Fourier en cosenos de f converge a e^{-kx} para $x \geq 0$:

$$e^{-kx} = \frac{2k}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{k^2 + \omega^2} \cos(\omega x)\, d\omega.$$

Para la integral en senos, calcule

$$B_\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-k\xi} \operatorname{sen}(k\xi)\, d\xi = \frac{2}{\pi} \frac{\omega}{k^2 + \omega^2}.$$

La integral en senos converge a e^{-kx} para $x > 0$ y a 0 para $x = 0$:

$$e^{-kx} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\omega}{k^2 + \omega^2} \operatorname{sen}(\omega x)\, d\omega \quad \text{para } x > 0.$$

A estas representaciones en integrales se les llama las *integrales de Laplace* ya que A_ω es $2/\pi$ veces la transformada de Laplace de sen(kx), mientras B_ω es $2/\pi$ veces la transformada de Laplace de cos(kx). ■

SECCIÓN 3.2 PROBLEMAS

En cada problema del 1 al 10, encuentre las representaciones en integral de Fourier en senos y en integral de Fourier en cosenos de la función. Determine a qué converge cada integral.

1. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{para } 0 \leq x \leq 10 \\ 0 & \text{para } x > 10 \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x) & \text{para } 0 \leq x \leq 2\pi \\ 0 & \text{para } x > 2\pi \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 & \text{para } 1 < x \leq 4 \\ 0 & \text{para } x > 4 \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} \cosh(x) & \text{para } 0 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{para } x > 5 \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{para } 0 \leq x \leq \pi \\ 2 & \text{para } \pi < x \leq 3\pi \\ 0 & \text{para } x > 3\pi \end{cases}$

6. $f(x) = \begin{cases} x & \text{para } 0 \leq x \leq 1 \\ x + 1 & \text{para } 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{para } x > 2 \end{cases}$

7. $f(x) = e^{-x} \cos(x)$ para $x \geq 0$

8. $f(x) = xe^{-3x}$ para $x \geq 0$

9. $f(x) = \begin{cases} k & \text{para } 0 \leq x \leq c \\ 0 & \text{para } x > c \end{cases}$

en donde k es constante y c es una constante positiva.

10. $f(x) = e^{-2x} \cos(x)$ para $x \geq 0$

11. Use las integrales de Laplace para calcular la integral de Fourier en cosenos de $f(x) = 1/(1 + x^2)$ y la integral de Fourier en senos de $g(x) = x/(1 + x^2)$.

3.3 La integral de Fourier compleja y la transformada de Fourier

Algunas veces es conveniente tener una forma compleja de la integral de Fourier. Esta situación compleja proveerá una plataforma natural a partir de la cual se desarrollará la transformada de Fourier.

Suponga que f es suave a pedazos en cada intervalo $[-L, L]$, y que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx$ converge. Entonces, en cualquier x,

$$\frac{1}{2}(f(x+) + f(x-)) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(\xi) \cos(\omega(\xi - x))\, d\xi\, d\omega,$$

por la expresión (3.3). Introduzca la forma exponencial compleja de la función coseno en esta expresión para escribir

$$\frac{1}{2}(f(x+)+f(x-)) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(\xi)\frac{1}{2}\left(e^{i\omega(\xi-x)}+e^{-i\omega(\xi-x)}\right) d\xi\, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(\xi)e^{i\omega(\xi-x)}\, d\xi\, d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(\xi)e^{-i\omega(\xi-x)}\, d\xi\, d\omega.$$

En la primera integral de la última línea, reemplace $\omega = -w$ para obtener

$$\frac{1}{2}(f(x+)+f(x-))$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^\infty f(\xi)e^{-iw(\xi-x)}\, d\xi\, dw + \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(\xi)e^{-i\omega(\xi-x)}\, d\xi\, d\omega.$$

Ahora escriba nuevamente la variable de integración en la última integral como ω y combine estas dos integrales para escribir

$$\frac{1}{2}(f(x+)+f(x-)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(\xi)e^{-i\omega(\xi-x)}\, d\xi\, d\omega. \tag{3.4}$$

Esta es la *representación en integral de Fourier compleja de f* en la recta real. Si hace $C_\omega = \int_{-\infty}^\infty f(t)e^{-i\omega t}\, dt$, entonces esta integral es

$$\frac{1}{2}(f(x+)+f(x-)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty C_\omega e^{i\omega x}\, d\omega.$$

Llame C_ω al *coeficiente de la integral de Fourier compleja de f*.

EJEMPLO 3.3

Sea $f(x) = e^{-a|x|}$ para todo real x, con a una constante positiva. Calcule la representación en integral de Fourier compleja de f. Primero, tiene

$$f(x) = \begin{cases} e^{-ax} & \text{para } x \geq 0 \\ e^{ax} & \text{para } x < 0 \end{cases}.$$

Más aún,

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\, dx = \int_{-\infty}^0 e^{ax}\, dx + \int_0^\infty e^{-ax}\, dx = \frac{2}{a}.$$

Ahora calcule

$$C_\omega = \int_{-\infty}^\infty e^{-a|t|}e^{-i\omega t}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^0 e^{at}e^{-i\omega t}\, dt + \int_0^\infty e^{-at}e^{-i\omega t}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^0 e^{(a-i\omega)t}\, dt + \int_0^\infty e^{-(a+i\omega)t}\, dt$$

$$= \left[\frac{1}{a-i\omega}e^{(a-i\omega)t}\right]_{-\infty}^0 + \left[\frac{-1}{a+i\omega}e^{-(a+i\omega)t}\right]_0^\infty$$

$$= \left(\frac{1}{a+i\omega}+\frac{1}{a-i\omega}\right) = \frac{2a}{a^2+\omega^2}.$$

La representación en integral de Fourier compleja de f es

$$e^{-a|x|} = \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2 + \omega^2} e^{i\omega x} \, d\omega. \blacksquare$$

La expresión de la derecha de la ecuación (3.4) conduce de forma natural a la transformada de Fourier. Para enfatizar cierto término, escriba la ecuación (3.4) como

$$\frac{1}{2}(f(x+) + f(x-)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i\omega\xi} \, d\xi \right) e^{i\omega x} \, d\omega. \quad (3.5)$$

El término dentro del paréntesis es la *transformada de Fourier de f.*

DEFINICIÓN 3.3 Transformada de Fourier

Suponga que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \, dx$ converge. Entonces la transformada de Fourier de f se define como la función

$$\mathfrak{F}[f](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} \, dt.$$

Así la transformada de Fourier de f es el coeficiente C_ω en la representación en integral de Fourier compleja de f.

$\mathfrak{F}$ convierte una función f en una nueva función llamada $\mathfrak{F}[f]$. Debido a que la transformada se usa en el análisis de señales, se usa t (para denotar el tiempo) como la variable de f, y ω como la variable de la función transformada $\mathfrak{F}[f]$. El valor de la función $\mathfrak{F}[f]$ en ω es $\mathfrak{F}[f](\omega)$, y este número se calcula para una ω dada, evaluando la integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} \, dt$. Si quiere mantener la atención sobre la variable t, algunas veces escribirá $\mathfrak{F}[f]$ como $\mathfrak{F}[f(t)]$.

Los ingenieros se refieren a la variable ω en la función transformada como la *frecuencia* de la señal f. Más adelante se discute cómo se usan la transformada de Fourier y la versión truncada llamada la *transformada de Fourier ventaneada*, para determinar la información del contenido de la frecuencia de una señal.

Como puede ser incómodo usar el símbolo $\mathfrak{F}[f(t)]$ en los cálculos, algunas veces se escribe la transformada de Fourier de f como $\hat{f}$. En esta notación,

$$\mathfrak{F}[f](\omega) = \hat{f}(\omega).$$

EJEMPLO 3.4

Sea a una constante positiva. Entonces

$$\mathfrak{F}\left[e^{-a|t|}\right](\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}.$$

Esto se sigue inmediatamente del ejemplo 3.3, donde calculó el coeficiente integral de Fourier C_ω de $e^{-a|t|}$. Este coeficiente es la transformada de Fourier de f. $\blacksquare$

EJEMPLO 3.5

Sean a y k números positivos, y sea

$$f(t) = \begin{cases} k & \text{para } -a \leq t < a \\ 0 & \text{para } t < -a \quad \text{y para } t \geq a \end{cases}$$

Esta función pulso puede escribirse en términos de la función de Heaviside como

$$f(t) = k[H(t + a) - H(t - a)],$$

y en la figura 3.2 aparece su gráfica. La transformada de Fourier de f es

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\, dt \\ &= \int_{-a}^{a} ke^{-i\omega t}\, dt = \left[\frac{-k}{i\omega}e^{-i\omega t}\right]_{-a}^{a} \\ &= -\frac{k}{i\omega}\left[e^{-i\omega a} - e^{i\omega a}\right] = \frac{2k}{\omega}\,\mathrm{sen}(a\omega). \end{aligned}$$

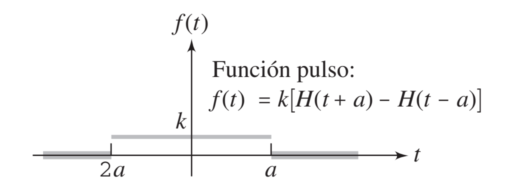


FIGURA 3.2

De nuevo también puede escribir

$$\mathfrak{F}[f](\omega) = \frac{2k}{\omega}\,\mathrm{sen}(a\omega),$$

o

$$\mathfrak{F}[f(t)](\omega) = \frac{2k}{\omega}\,\mathrm{sen}(a\omega). \blacksquare$$

Debido a la ecuación (3.5), la representación en integral de Fourier de f es

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}\, d\omega.$$

Si f es continua, y f' es continua a pedazos en todo el intervalo $[-L, L]$, entonces la integral de Fourier de f representa a f:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}\, d\omega. \tag{3.6}$$

Por tanto, puede usar la ecuación (3.6) como una transformada inversa de Fourier, recuperando a f a partir de $\hat{f}$. Esto es importante porque, en las aplicaciones, se usa la transformada de Fourier para cambiar un problema que involucra a f de una forma a otra supuestamente más fácil, que se resuelve para $\hat{f}(\omega)$. Debe tener alguna manera de recuperar la $f(t)$ que quiere, y la ecuación (3.6) es el vehículo que se usa frecuentemente. Escriba $\mathfrak{F}^{-1}[\hat{f}] = f$ si $\mathfrak{F}[f] = \hat{f}$.

Como es de esperarse de cualquier transformada integral, $\mathfrak{F}$ es lineal:

$$\mathfrak{F}[\alpha f + \beta g] = \alpha\mathfrak{F}[f] + \beta\mathfrak{F}[g].$$

Se dice que la integral que define la transformada y la integral (3.6) que da su inversa, constituyen un *par de transformadas* para la transformada de Fourier. Bajo ciertas condiciones de f,

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt \quad \text{y} \quad f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,dt.$$

EJEMPLO 3.6

Sea

$$f(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{para } -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{para } t > 1 \quad \text{y para } t < -1 \end{cases}$$

Entonces f es continua y absolutamente integrable y f' es continua a pedazos. Calcule

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt \\ &= \int_{-1}^{1} (1 - |t|)e^{-i\omega t}\,dt = \frac{2(1 - \cos(\omega))}{\omega^2}. \end{aligned}$$

Este es el coeficiente de Fourier C_ω en el desarrollo de Fourier complejo de $f(t)$.

Si quiere regresar, entonces por la ecuación (3.6),

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1 - \cos(\omega))}{\omega^2}e^{i\omega t}\,d\omega. \end{aligned}$$

Puede verificar esto integrando explícitamente. Use un paquete de software para obtener

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1 - \cos(\omega))}{\omega^2}e^{i\omega t}\,d\omega \\ &= \pi t \text{ signo}(t+1) + \pi \text{ signo}(t+1) + \pi t \text{ signo}(t-1) \\ &\quad -\pi \text{ signo}(t-1) - 2 \text{ signo}(t), \end{aligned}$$

en donde

$$\text{signo}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{para } \omega > 0 \\ 0 & \text{para } \omega = 0 \\ -1 & \text{para } \omega < 0 \end{cases}$$

Esta expresión es igual a $1 - |t|$ para $-1 \leq t \leq 1$ y 0 para $t > 1$ y para $t < -1$ verificando el resultado. ■

En el contexto de la transformada de Fourier, el *espectro de amplitud* frecuentemente se interpreta como la gráfica de $|\hat{f}(\omega)|$. Esto es en la misma forma en la que se usó este término en relación con la serie de Fourier.

EJEMPLO 3.7

Si $f(t) = H(t)e^{-at}$ entonces $\hat{f}(\omega) = 1/(a + i\omega)$, de donde

$$\left|\hat{f}(\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}.$$

La figura 3.3 muestra la gráfica de $|\hat{f}(\omega)|$. Esta gráfica es el espectro de amplitud de f. ■

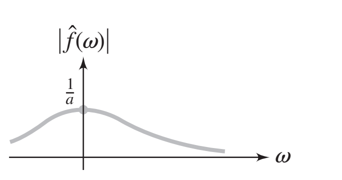


FIGURA 3.3 *Gráfica de* $|\hat{f}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}}$, *con* $f(t) = H(t)e^{-\alpha t}$.

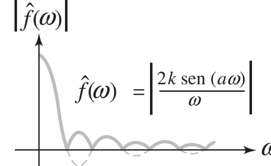


FIGURA 3.4

EJEMPLO 3.8

El espectro de amplitud de la función f del ejemplo 3.5 es la gráfica de

$$\left|\hat{f}(\omega)\right| = 2k\left|\frac{\operatorname{sen}(a\omega)}{\omega}\right|,$$

que se muestra en la figura 3.4. ■

Ahora algunas de las propiedades importantes y reglas computacionales para la transformada de Fourier. Para cada regla también se establece la versión para la transformada inversa. En lo que sigue, suponga que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt$ converge y para la versión de la inversa, que f es continua y f' continua a pedazos en cada $[-L, L]$.

TEOREMA 3.1 *Corrimiento del tiempo*

Si t_0 es un número real entonces

$$\mathfrak{F}[f(t - t_0)](\omega) = e^{-i\omega t_0}\hat{f}(\omega). \quad ■$$

Esto es, si corre el tiempo hacia atrás t_0 unidades y reemplaza $f(t)$ por $f(t - t_0)$, entonces la transformada de Fourier de esta función recorrida es la transformada de Fourier de f, multiplicada por el factor exponencial $e^{-i\omega t_0}$.

Prueba

$$\mathfrak{F}[f(t - t_0)](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0)e^{-i\omega t}\,dt$$

$$= e^{-i\omega t_0}\int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0)e^{-i\omega(t - t_0)}\,dt.$$

Sea $u = t - t_0$ para escribir

$$\mathfrak{F}[f(t - t_0)](\omega) = e^{-i\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\omega u}\, du = e^{-i\omega t_0} \hat{f}(\omega). \blacksquare$$

EJEMPLO 3.9

Suponga que quiere la transformada de Fourier del pulso de amplitud 6 que se enciende en el tiempo 3 y se apaga en el tiempo 7. Esta es la función

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 3 \quad \text{y para } t \geq 7 \\ 6 & \text{para } 3 \leq t < 7 \end{cases},$$

que se muestra en la figura 3.5. Por supuesto, puede calcular $\hat{g}(\omega)$ integrando. Pero también observe que el punto medio del pulso (esto es, de la parte distinta de cero) ocurre cuando $t = 5$. Corra la gráfica 5 unidades a la izquierda para centrar el pulso en cero (figura 3.6). Si llama f a este pulso recorrido, entonces $f(t) = g(t + 5)$. Corriendo f cinco unidades a la derecha regresa a g:

$$g(t) = f(t - 5).$$

La clave de esto, es que por el ejemplo 3.5 ya conocía que la transformada de Fourier de f:

$$\mathfrak{F}[f(t)](\omega) = 12\frac{\text{sen}(2\omega)}{\omega}.$$

Por el teorema del corrimiento del tiempo,

$$\mathfrak{F}[g(t)](\omega) = \mathfrak{F}[f(t - 5)](\omega) = 12e^{-5i\omega}\frac{\text{sen}(2\omega)}{\omega}. \blacksquare$$

La versión inversa del teorema del corrimiento del tiempo es

$$\mathfrak{F}^{-1}[e^{-i\omega t_0} F(\omega)](t) = f(t - t_0). \tag{3.7}$$

EJEMPLO 3.10

Suponga que quiere

$$\mathfrak{F}^{-1}\left[\frac{e^{2i\omega}}{5 + i\omega}\right].$$

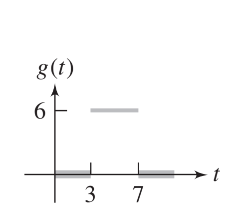


FIGURA 3.5

$$g(x) = \begin{cases} 6 & \text{para } 3 \leq t < 7 \\ 0 & \text{para } t < 3 \\ & \text{y para } t \geq 7 \end{cases}$$

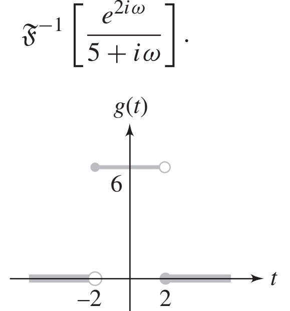


FIGURA 3.6 *La función de la figura 3.5 corre cinco unidades a la izquierda.*

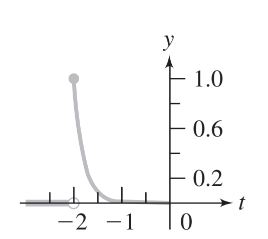


FIGURA 3.7 *Gráfica de* $H(t + 2)e^{-5(t+2)}$.

La presencia del factor exponencial sugiere la versión inversa del teorema del corrimiento del tiempo. En la ecuación (3.7), ponga $t_0 = -2$ para escribir

$$\mathfrak{F}^{-1}\left[\frac{e^{2i\omega}}{5+i\omega}\right] = f(t-(-2)) = f(t+2),$$

donde

$$f(t) = \mathfrak{F}^{-1}\left[\frac{1}{5+i\omega}\right] = H(t)e^{-5t}.$$

Por tanto,

$$\mathfrak{F}^{-1}\left[\frac{e^{2i\omega}}{5+i\omega}\right] = f(t+2) = H(t+2)e^{-5(t+2)}.$$

En la figura 3.7 se muestra la gráfica de la función. ■

El siguiente resultado recuerda al teorema del primer corrimiento para la transformada de Laplace.

TEOREMA 3.2 *Corrimiento de frecuencia*

Si ω_0 es cualquier número real, entonces

$$\mathfrak{F}[e^{i\omega t}f(t)] = \hat{f}(\omega-\omega_0).\ ■$$

Prueba

$$\mathfrak{F}[e^{i\omega t}f(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_0 t}f(t)e^{-i\omega t}\,dt$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i(\omega-\omega_0)t}\,dt = \hat{f}(\omega-\omega_0).\ ■$$

La versión inversa del teorema del corrimiento de frecuencia es

$$\mathfrak{F}^{-1}[\hat{f}(\omega-\omega_0)(t) = e^{i\omega_0 t}f(t).$$

TEOREMA 3.3 *Escala*

Si a es un número real distinto de cero, entonces

$$\mathfrak{F}[f(at)](\omega)] = \frac{1}{|a|}\hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right).\ ■$$

Esto se puede probar calculando directamente a partir de la definición. La versión para la transformada inversa de este resultado es

$$\mathfrak{F}^{-1}\left[\hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)\right](t) = |a|\,f(at).$$

Esta conclusión se conoce como el *teorema de escala* debido a que no queremos la transformada de $f(t)$, si no de $f(at)$, en donde a puede pensarse como un factor de escala. El teorema dice que podemos calcular la transformada de la función escalada reemplazando ω por ω/a en la transformada de la función original, y dividiendo entre la magnitud del factor de escala.

EJEMPLO 3.11

Sabe del ejemplo 3.6 que si

$$f(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{para } -1 \le t \le 1 \\ 0 & \text{para } t > 1 \quad \text{y para } t < -1 \end{cases}$$

entonces

$$\hat{f}(\omega) = 2\frac{1 - \cos(\omega)}{\omega^2}.$$

Sea

$$g(t) = f(7t) = \begin{cases} 1 - |7t| & \text{para } -\frac{1}{7} \le t \le \frac{1}{7} \\ 0 & \text{para } t > \frac{1}{7} \quad \text{y para } t < \frac{-1}{7} \end{cases}$$

Entonces

$$\hat{g}(\omega) = \mathfrak{F}[f(7t)](\omega) = \frac{1}{7}\hat{f}\left(\frac{\omega}{7}\right)$$

$$= \frac{2}{7}\frac{1 - \cos(\omega/7)}{(\omega/7)^2} = 14\frac{1 - \cos(\omega/7)}{\omega^2}. \blacksquare$$

TEOREMA 3.4 *Inversión del tiempo*

$$\mathfrak{F}[f(-t)](\omega) = \hat{f}(-\omega). \blacksquare$$

Este resultado es llamado inversión del tiempo porque reemplaza t por $-t$ en $f(t)$ para obtener $f(-t)$. La transformada de esta nueva función se obtiene simplemente reemplazando ω por $-\omega$ en la transformada de $f(t)$. Esta conclusión se sigue inmediatamente del teorema de escala, poniendo $a = -1$. La versión inversa de la inversión del tiempo es

$$\mathfrak{F}^{-1}[\hat{f}(-\omega)](t) = f(-t).$$

TEOREMA 3.5 *Simetría*

$$\mathfrak{F}[\hat{f}(t)](\omega) = 2\pi f(-\omega). \blacksquare$$

Para entender esta conclusión empiece con $f(t)$ y tome su transformada de Fourier $\hat{f}(\omega)$. Reemplace ω por t y tome la transformada de la función $\hat{f}(t)$. La propiedad de simetría de la transformada de Fourier establece que la transformada de $\hat{f}(t)$ es sólo la función original $f(t)$ con $-\omega$ en lugar de t, y después esta nueva función multiplicada por 2π.

EJEMPLO 3.12

Sea

$$f(t) = \begin{cases} 4 - t^2 & \text{para } -2 \le t \le 2 \\ 0 & \text{para } t > 2 \quad \text{y para } t < -2 \end{cases}$$

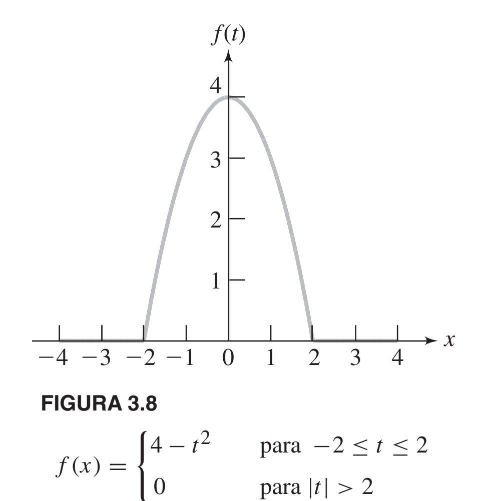


FIGURA 3.8

$$f(x) = \begin{cases} 4 - t^2 & \text{para } -2 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{para } |t| > 2 \end{cases}$$

En la figura 3.8 se muestra la gráfica de f. La transformada de Fourier de f es

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\, d\omega = \int_{-2}^{2} (4 - t^2)e^{-i\omega t}\, dt \\ &= 4\frac{\operatorname{sen}(2\omega) - 2\omega\cos(2\omega)}{\omega^3}. \end{aligned}$$

En este ejemplo, $f(-t) = f(t)$, así que intercambiando $-\omega$ por ω no habrá ninguna diferencia en $\hat{f}(\omega)$, y puede ver que éste es el caso. ■

TEOREMA 3.6 *Modulación*

Si ω_0 es un número real, entonces

$$\mathfrak{F}[f(t)\cos(\omega_0 t)](\omega) = \frac{1}{2}\left[\hat{f}(\omega + \omega_0) + \hat{f}(\omega - \omega_0)\right]$$

y

$$\mathfrak{F}[f(t)\operatorname{sen}(\omega_0 t)](\omega) = \frac{1}{2}i\left[\hat{f}(\omega + \omega_0) - \hat{f}(\omega - \omega_0)\right]. \ ■$$

Prueba Ponga $\cos(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t})$ y use la linealidad de $\mathfrak{F}$ y el teorema del corrimiento de frecuencia para obtener

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}[f(t)\cos(\omega_0 t)](\omega) &= \mathfrak{F}\left[\frac{1}{2}e^{i\omega_0 t}f(t) + \frac{1}{2}e^{-i\omega_0 t}f(t)\right](\omega) \\ &= \frac{1}{2}\mathfrak{F}[e^{i\omega_0 t}f(t)](\omega) + \frac{1}{2}\mathfrak{F}[e^{-i\omega_0 t}f(t)](\omega) \\ &= \frac{1}{2}\hat{f}(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}\hat{f}(\omega + \omega_0). \end{aligned}$$

De manera semejante se obtiene la segunda conclusión, usando $\operatorname{sen}(\omega_0 t) = (1/2i)(e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t})$. ■

MATEMÁTICAS AVANZADAS PARA INGENIERÍA Séptima edición

Peter V. O'neil

Esta séptima edición de **Matemáticas avanzadas para ingeniería** amplía las ediciones anteriores al mismo tiempo que conserva el orden ya clásico del volumen, con el ánimo de respetar el orden de planes de estudio que numerosos cursos han construido en torno a sus páginas a lo largo de los años. En sus páginas se hace un mayor énfasis en la construcción y análisis de modelos, en la utilización de ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales, de transformadas integrales y de funciones especiales.

Esta edición incluye tres capítulos completamente nuevos que abordan los siguentes temas: matrices, proyecciones ortogonales, mínimos cuadrados, aproximaciones de vectores y funciones, factorización LU, transformaciones lineales y representaciones de matrices. Estos nuevos capítulos, al mismo tiempo que ayudan a que el volumen siga siendo uno de los más consultados y referenciados en la materia, hacen que el libro cubra en un solo volumen todos los materiales que el estudiante de ingeniería puede llegar a necesitar en un curso de matemáticas avanzadas.

Fotografía de portada: shutterstock.com



Visite nuestro sitio en
http://latinoamerica.cengage.com

